08/04/2019

Μάθημα 11ο

Βαθμωση: $\text{grad}\, V = \bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{k} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$

κυλινδρικές: $\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{\theta}_0 + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{z}_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \overbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial V}{\partial z}}^{\text{καρτεσιανές}}\right)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad |J| = r$$

σφαιρικές: $\bar{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{\theta}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\bar{\varphi}_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}, \quad |J| = r^2\sin\varphi$$

Ολοκλήρωση Κίνησης

Εξισώσεις κίνησης:

α) 2ος Ν.Ν. $m\bar{a} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$

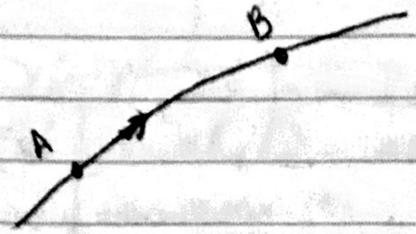
β) $\bar{p} = m\bar{v}$

γ) $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{N} = \bar{r} \times \bar{F}$

δ) $\frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) + V(x,y,z) = \text{Σταθ.}$ (*)

(*) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο Υ.Σ. είναι συντηρητικές.

Bernoulli Daniel (Άλλη έκφραση ενέργειας)

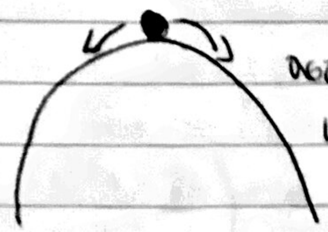


$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p + \rho g h = \text{σταθερό}$$

κινητική ενέργεια ρευστού — δυναμική ενέργεια ρευστού

Αναλυτική λύση των Εξισώσεων Euler.

(Συνήθως στα δυναμικά έχω εξάρτηση από τον χρόνο)

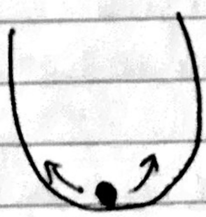


ασταθής ισορροπία

↑

"φεύγει" εύκολα από το Σ.Ι.

(εξαρτάται από κάποια κατεύθυνση)



ευσταθής ισορροπία

↑

"φεύγει" δύσκολα από το σημείο ισορροπίας

Άσκηση Υ.Σ. m, κινείται στον Ox άξονα υπό την επίδραση συντηρητικής δυναμής $V(x)$. Αν το Υ.Σ. βρίσκεται στα x_1, x_2 κατά τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 και E είναι η μηχανική του ενέργεια τότε:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Απάντηση: Από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: $E = T + V(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - V(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(x)\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V(x)}$$

Η ταχύτητα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική και εξαρτάται από το $\sqrt{E - V(x)}$

Ο χρόνος μπορεί να μεταβάλλεται αλλά όχι η θέση

Μπορώ να μηδενίσω την ταχύτητα όταν $E = V(x)$

Τον χρόνο t_1 έως t_2, βρίσκομαι στις θέσεις x_1 έως x_2

$$\Rightarrow dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \overset{(\text{για "+"})}{\Rightarrow} \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}}$$

Σύμφωνα με τον Νεύτωνα μπορώ να κινηθώ και μπροστά στο χρόνο και πίσω.
(Στη φύση βέβαια δύσκολο)

<u>Άσκηση 4.2.</u> $m = 2\,kgr$ κινείται στο Oxy επίπεδο υπό την επίδραση $V(x,y) = 8x - 2y$. Ξεκινάει από την ηρεμία,
$t=0$, $\dot{\vec{r}} = 5\hat{i} + 2y\hat{j}$

α) Εξισώσεις κίνησης

β) Ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή

<u>Απάντηση:</u>

α) 1ος Ν.Ν.: $m\vec{a} = \vec{F} \xrightarrow{\text{καρτ/νες}} \begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = F_x, & x\text{-άξονα} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} = F_y, & y\text{-άξονα} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow m\cdot\ddot{x} = -8 \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = 2 \end{cases} \overset{\text{ολοκλ/νω}}{\Rightarrow}$$

• $\int m\frac{d\dot{x}}{dt}dt = -\int 8\,dt \Rightarrow m\int d\dot{x} = -8\int dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\dot{x} = -8t + c_1 \Rightarrow \dot{x} = -\frac{8}{m}t + c$$

Για να βρω το c $\Rightarrow$ αρχικές συνθήκες
($\dot{x} = 5, \dot{y} = 2$ από $\dot{\vec{r}}$)

Άρα για $t=0$: $5 = -\frac{8}{2}\cdot 0 + c \Rightarrow c = 5$

<u>Άρα:</u> $\boxed{\dot{x} = -\frac{8}{m}\cdot t + 5}$

• $m\frac{d}{dt}\dot{y} = 2 \Rightarrow m\int d\dot{y} = \int 2\,dt \Rightarrow m\dot{y} = 2t + c_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{y} = \frac{2}{m}t + c'_2 \Rightarrow \boxed{\dot{y} = \frac{2t}{m} + 2}$

Άρα: $(\dot{x}, \dot{y}) = \left(-\frac{8}{m}t + 5, \frac{2t}{m} + 2\right)$

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας
Αυτά τα συστήματα χρειάζονται μόνο μια παράμετρο για να καθορίζει πλήρως η θέση του Υ.Σ., δηλ:

* $m\ddot{x} = F(x)$, ορίζει την παράμετρο $x(t)$

Από την * μπορούμε να καθορίσουμε τη θέση $x(t)$ και την ταχύτητα $\dot{x}(t)$ του Υ.Σ.

Για να βρω τα σημεία ισορροπίας της * θα πάρω:

• $F(x_0) = 0$, τότε τα x_0 ονομάζονται σημεία ισορροπίας. (1)

• Επίσης, είδαμε ότι καταλήξαμε σε μια σχέση της μορφής:
$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{[E - V(x)]^{1/2}}$, από εδώ θα μπορούσαμε να βρούμε σημεία ισορροπίας εκεί που $E = V(x)$ (2) *

• Να βρούμε ακρότατα για την $V(x)$ ή $\frac{dV(x)}{dx}$ (3)

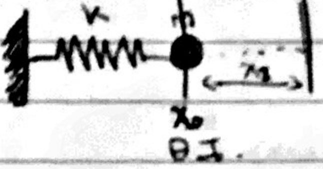
* Όταν $E = V(x)$ έχουμε ισορροπία αφού είδαμε ότι με αυτή τη συνθήκη μηδενίζεται η ταχύτητα.

(Όταν F συντηρητική έχω $F = \frac{dV}{dx}$)

Μελέτη σημείων ισορροπίας

$F(x_0) = 0$ κ' $\frac{dV(x)}{dx} = 0$

$$\bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow F(x) = -\frac{dV}{dx}(x) \\ \left.\begin{aligned} F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = V(x) \end{cases}$$



Έστω στη $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ (Θ.Ι.)
μετατοπίζω το σωματίδιο κατά $x_1(t)$
Τότε: $x = x_0 + x_1(t)$

Εάν η F ήταν γραμμική θα μπορούσα να γράψω: $F(x_0+x_1) = F(x_0) + F(x_1)$

2ος ΝΝ $m\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + x_1(t)) = F(x_0 + x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\underbrace{\cancel{\frac{d^2}{dt^2}x_0}}_{0 \text{ (ως Θ.Ι.)}} + m\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = F(x_0 + x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = F(x_0 + x_1)$$

Πώς μπορώ να την γραμμικοποιήσω στη γειτονιά του x_0;
Αναπτύσσω με Taylor ως προς x.

$$F(x_0 + x_1) \overset{Taylor}{=} F(x_0) + \frac{dF(x_0)}{dx}x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2F(x_0)}{dx^2}x_1^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3(x_0)}{dx^3}x_1^3 \ldots$$

Κρατάμε την 1ης τάξης διόρθωση. Επίσης $F(x_0) = 0$.

Άρα: $\boxed{m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dF(x_0)}{dx}x_1}$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 - \frac{df(x_0)}{dx} x_1 = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_1 + \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} x_1 = 0 \Rightarrow$$

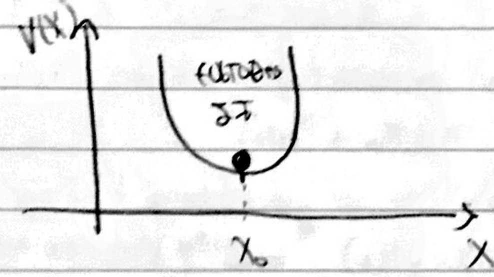
$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_1 + k x_1 = 0 \quad , \quad k = \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}}$$ Απλός αρμονικός ταλαντωτής ΣΔΕ 2ης τ., γρ., ομ.

Τι γίνεται με το k; → Μελέτη

<u>Μελέτη της ΣΔΕ:</u>

• <u>1η περίπτωση</u>: $k > 0 \Rightarrow \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} > 0$, $F(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{dV(x_0)}{dx} = 0$

Άρα έχω τοπικό ελάχιστο



σημείο ευστάθειας

Αφού $k > 0$, τότε η λύση της ΣΔΕ:

$x_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• <u>2η περίπτωση</u>: $k < 0 \Rightarrow \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} < 0$,

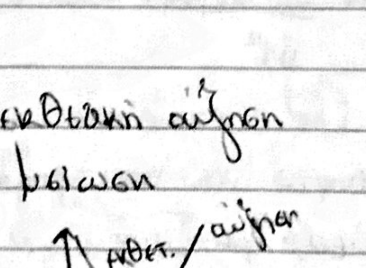
$$x_1(t) = c_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + c_2 e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

εκθετική αύξηση

εκθετική μείωση

Τότε το ΣΙ είναι:

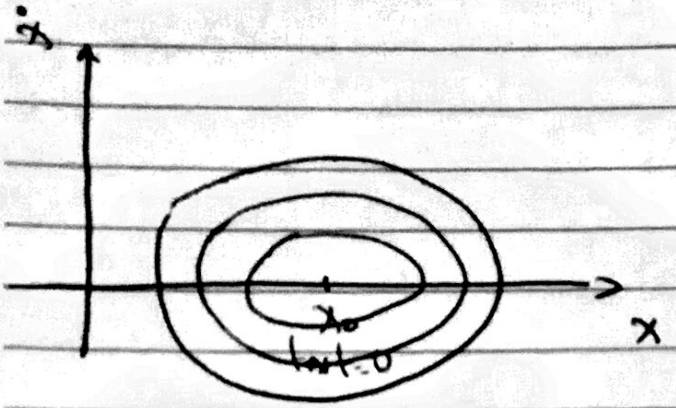
ασταθές και φεύγει στο άπειρο.



Χώρος Φάσεων $(x, \dot{x})$ (→ Γραφική Παράσταση των $x, \dot{x}$)

Θα δω τις τροχιές που διαγράφει το Υ.Σ.

Ευσταθές Σ.Ι.



Ανάλογα με την ταλάντωση που κάνω το ẋ θα μας δώσει ή ελλείψεις ή κύκλους